

Travaux dirigés de Mathématiques pour la Physique

Exercice 1

Écrire les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre des fonctions suivantes:

1. $f(x, y) = \frac{\ln x}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } y \in \mathbb{R}^*;$
2. $g(x, y) = x \cos(x^2 + xy), \quad x, y \in \mathbb{R};$
3. $h(x, y) = x^y, \quad x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } y \in \mathbb{R}.$

Exercice 2

Les formes différentielles suivantes sont-elles des différentielles totales? Si oui donner les fonctions dont elles sont les différentielles:

1. $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy;$
2. $\cos(xy^2)dx + 2\cos(xy)dy.$

Exercice 3

La période des oscillations de faible amplitude d'un pendule de longueur l est $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

1. Calculer T pour un pendule de longueur $l = 1m$ avec $g = 9,807m/s^2$.
2. Quelle est la variation de la période pour une petite variation de la longueur de $1cm$.

Exercice 4

Soit $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$. Trouver les fonctions f telles que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 5

Si une mole de gaz parfait occupe le volume V à la température T et à la pression P alors on a $PV = RT$, où R est une constante. Montrer qu'on a

$$\frac{\partial P}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} = -1 \text{ et } T \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Exercice 6

Les questions de ce exercice sont indépendantes.

1. Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.
2. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$.
Calculer le rotationnel de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)).$$

Déterminer la divergence de f en tout point.

4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x, y, z) = x^2 - xy^3 - y^2z + z^3.$$

Déterminer le laplacien de f en tout point de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7: (Laplacien en coordonnées polaires)

Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par $F(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

1. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on a

$$\Delta f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right) (r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} (r, \theta).$$

Exercice 8

On considère un point M d'un plan muni d'un repère cartésien orthonormé $\{o, \vec{e}_x, \vec{e}_y\}$. Il est repéré par ses coordonnées polaires ρ et φ .

1. Écrire les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère local cartésien puis dans le repère local polaire.
2. Calculer $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi}$ puis en déduire l'expression du déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ en coordonnées polaires.
3. Le point M décrivant une spirale logarithmique d'équation $\rho = ae^\varphi$, calculer $d\overrightarrow{OM}$.
4. Le point M se déplace avec une vitesse angulaire constante ($\varphi = \omega t$, ω constante), écrire les composantes du vecteur vitesse $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ dans le repère local polaire.

Exercice 9

Soit un point M d'un espace muni repère cartésien orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

1. Écrire les composantes des vecteurs unitaires du repère local associé à M en coordonnées sphériques.
2. Calculer dans le repère local les dérivées de ces vecteurs par rapport à r , θ et φ .
3. Calculer le déplacement infinitésimal $d\vec{l}$ en fonction des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$.
4. Écrire dans le repère local les composantes des vecteurs vitesse et accélération d'un point M en mouvement.